



TITLE:

河川に於ける潮汐

AUTHOR(S):

岡本, 元治郎

CITATION:

岡本, 元治郎. 河川に於ける潮汐. 地球物理 1940, 4(1): 62-80

ISSUE DATE:

1940-04-30

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/178249>

RIGHT:

河川に於ける潮汐

理學士 岡本元治郎

緒言

河口に潮浪が到來する場合に、河川に沿つて潮汐振動が傳播される。河底の傾斜及び兩岸竝に河底での摩擦に依つて、河川に特有なる潮汐振動と潮流とを生ずることはよく知られてゐる事柄である。

この問題に就いては既に多くの學者によつて研究されて居る。Harris は其の著 Manual of Tide で極めて簡單なる場合、即ち摩擦がなく、河の深さに比して潮差が甚小であるとの假定の下に論じたるを始めとし、楠宗道氏⁽¹⁾は土木學會誌上にて海水の摩擦を考慮に入れて一步を進めたるが相變らず潮差が水深に比して甚小なる場合を研究してゐる。又物部長穗氏⁽²⁾は潮汐の觀測から潮流を求める略算法を土木學會誌に發表された。

現著者は本論文に於て河川の兩岸竝に河底での摩擦を考慮するは勿論、潮差が水深に比して甚小ならざる一般の場合を論究する。

茲には次の如き境界を有する河川を考へる。

(1) 河幅は一樣にして、横斷面が同様であるとし、河底では何處でも一樣なる傾斜があると考へる。而して其の勾配は小なるものとする。

(2) 相當大なる河川では河口より餘り遠からざる範圍に於ては潮汐を考へざるときの水深は大略一樣と看做し得るから河底の傾斜或は水面の傾斜に基く河流は常に一定にして、何處でも一樣と假定する。

(3) 境界條件は(1)及び(2)が河川の上流にまで満足されてゐると假定する。又遙か上流では潮汐が全く零であると假定する。

河川は幅狭く、淺き水路であるから河底竝に兩岸での摩擦を考慮すべきは勿論であるが、地球自轉の効果は之を無視して差支ない、又海水と河水とは同様と看做することとする。

(1) 楠 宗道：土木學會誌，十七卷，第三號，昭和六年七月。

(2) 物部長穗：土木學會誌，第三卷，第二號，大正六年六月。

河川の兩岸竝に河底による摩擦抵抗は平均流速の自乗に比例すると考へるべきであるが、斯くすれば數式が複雑になるから平均流速に比例すると假定する。しかし摩擦抵抗の係数を定めるのに次の方法を取ることとする。即ち水面勾配の絶對値の一週期間での平均値に基く流速を Chezy の法則に依つて計算せるものと、摩擦抵抗が平均流速の一乗に比例すると考へたときの計算値とが相一致する様に摩擦係数を定める。

潮差が深度に比して甚小ならざる一般の場合を考へるのであるから運動の方程式に於ても慣性項を考慮すべきである。尙潮汐振動は半日潮を考へる。又解法は逐次近似法を適用する。

1. 基本式及び諸條件

河幅は一樣にして横断面も亦一樣であると假定する。河底には僅かの傾斜があつて又河の表面にも傾斜がある。潮汐を無視せるときの水深は何處でも一樣であると假定する。従つて河底及び水面の傾斜は相等しく其の勾配に基く河流は常に一定にして何處でも一樣である。其の勾配を γ_0 とし、水深を h とする。河口での潮汐が最高水位にある瞬間を時刻を計る基準とし、又河口より上流の方向に x 軸をとる。

河口に於て平均水位に在る水平面よりの昇降を ξ とし、平均河表面よりの潮汐に依る昇降を ζ とすれば

$$\bar{\zeta} = \xi + \gamma_0 x \dots\dots\dots (1.1)$$

にして、水面の勾配は

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \gamma_0 \dots\dots\dots (1.2)$$

河水と海水とを同様と看做し、地球自轉の效果を無視し、河川の兩岸竝に河底での摩擦抵抗を R にて表はせば運動方程式は

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -R - g \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \gamma_0 \right) \dots\dots\dots (1.3)$$

にて與へられる。茲に \bar{v} は横断面での平均流速を表はすものとする。

河幅及び水深が一樣なりと假定するから連續方程式は次の如く與へられる。即ち

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \bar{\zeta}) \bar{v}] = 0 \dots\dots\dots (1.4)$$

摩擦抵抗 R が平均流速 \bar{v} に比例すると假定する。即ち

$$R = f \bar{v} \dots \dots \dots (1.5)$$

とする。茲に f は摩擦抵抗の係数である。

河底又は水面の勾配 γ_0 による河流速を v_0 とすれば、 $v_0 = \frac{\gamma_0}{f} g$ にして一定である。従つて潮流を v とすれば

$$\bar{v} = v - v_0 = v - \frac{\gamma_0}{f} g \dots \dots \dots (1.6)$$

式(1.5)及び(1.6)を代入すれば、式(1.3)及び(1.4)は夫々に次の如くなる。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v - v_0) \frac{\partial v}{\partial x} = -f v - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \dots \dots \dots (1.3')$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta)(v - v_0)] \dots \dots \dots (1.4')$$

河口に於て潮汐の最高水位にある瞬間を時刻 t を計る基準とするから河口での潮汐振動を

$$\zeta(x, t)|_{x=0} = a \cos \sigma t \dots \dots \dots (1.7)$$

とすることが出来る。茲に $2a$ は潮差にして潮汐の週期は $\frac{2\pi}{\sigma}$ なりとする。

又上流に於ては潮汐が全然ないと考へるから河川の上流では次の境界條件が満足するものと假定する。即ち

$$\zeta(x, t)|_{x=\infty} = 0 \dots \dots \dots (1.8)$$

2. 解 法

微分方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v - v_0) \frac{\partial v}{\partial x} = -f v - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \dots \dots \dots (1.3')$$

$$\text{及び } \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta)(v - v_0)] \dots \dots \dots (1.4')$$

にて與へられる v 及び ζ は過渡的には強制振動と減衰振動とが共有すべきも、週期の大きな潮汐(半日潮)を論究するのであるから河口での潮汐振動に依る強制振動のみ考へれば充分である。依つて $v(x, t)$ 及び $\zeta(x, t)$ は共に週期的にして潮汐の週期を $\frac{2\pi}{\sigma}$ とすれば $v(x, t)$, $\zeta(x, t)$ は共に $e^{i\sigma t}$, $e^{2i\sigma t}$, $e^{3i\sigma t}$, 等の因子を有する項より成ると考へることが出来る。

故に $T \equiv e^{i\sigma t}$ とすれば $v(x, t)$, 及び $\zeta(x, t)$ は夫々次の如く表はすことが出来る。即ち

$$\begin{aligned}\tau(x, t) &= \tau_1(x, t) + \tau_2(x, t) + \tau_3(x, t) + \cdots \\ &= \Re [\varphi_1(x) T + \varphi_2(x) T^2 + \varphi_3(x) T^3 + \cdots], \\ \zeta(x, t) &= \zeta_1(x, t) + \zeta_2(x, t) + \zeta_3(x, t) + \cdots \\ &= \Re [\psi_1(x) T + \psi_2(x) T^2 + \psi_3(x) T^3 + \cdots].\end{aligned}$$

之等を微分方程式(1.3')及び(1.4')に代入して兩邊に於ての T に就いての同次項の係數を比較すれば $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, \cdots ; $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, \cdots 等を決定すべき微分方程式が得られる。即ち次の通りである。

$$\left. \begin{aligned}(f+i\sigma)\varphi_1(x) - v_0 \frac{d\varphi_1}{dx} &= -g \frac{d\psi_1}{dx}, \cdots \cdots \cdots (a_1) \\ i\sigma\psi_1(x) - v_0 \frac{d\psi_1}{dx} &= -h \frac{d\varphi_1}{dx}, \cdots \cdots \cdots (b_1) \\ (f+i2\sigma)\varphi_2(x) - v_0 \frac{d\varphi_2}{dx} &= -g \frac{d\psi_2}{dx} - \varphi_1(x) \frac{d\varphi_1}{dx}, \cdots \cdots \cdots (a_2) \\ i2\sigma\psi_2(x) - v_0 \frac{d\psi_2}{dx} &= -h \frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\psi_1(x)], \cdots \cdots \cdots (b_2) \\ (f+i3\sigma)\varphi_3(x) - v_0 \frac{d\varphi_3}{dx} &= -g \frac{d\psi_3}{dx} - \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\varphi_2(x)], \cdots \cdots \cdots (a_3) \\ i3\sigma\psi_3(x) - v_0 \frac{d\psi_3}{dx} &= -h \frac{d\varphi_3}{dx} - \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\psi_2(x) + \varphi_2(x)\psi_1(x)], \cdots \cdots \cdots (b_3) \\ &\cdots \cdots \cdots\end{aligned}\right\}$$

次に $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, \cdots 等が満足すべき境界條件は夫々に

$$|\psi_1(x)|_{x=0} = 0, \quad |\psi_1(x)|_{x=\infty} = 0 \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$|\psi_2(x)|_{x=0} = 0, \quad |\psi_2(x)|_{x=\infty} = 0 \cdots \cdots \cdots (2)$$

$$|\psi_3(x)|_{x=0} = 0, \quad |\psi_3(x)|_{x=\infty} = 0 \cdots \cdots \cdots (3)$$

である。此等の境界條件は境界條件(1.7)及び(1.8)を満足すること明である。

[I] 第一次近似解 $\zeta_1(x, t)$, $\tau_1(x, t)$

$$\left. \begin{aligned}(f+i\sigma)\varphi_1(x) - v_0 \frac{d\varphi_1}{dx} &= -g \frac{d\psi_1}{dx}, \cdots \cdots \cdots (a_1) \\ i\sigma\psi_1(x) - v_0 \frac{d\psi_1}{dx} &= -h \frac{d\varphi_1}{dx}, \cdots \cdots \cdots (b_1)\end{aligned}\right\}$$

なる聯立微分方程式を解く。

式(a₁)を x に就いて微分して、夫に式(b₁)を代入し、 $\varphi_1(x)$ を消去すれば $\psi_1(x)$ 満足すべき微分方程式が得られる。即ち

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{v_0(f+i2\sigma)}{gh-v_0^2} \frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\sigma^2-if\sigma}{gh-v_0^2} \psi_1(x) = 0 \dots\dots\dots (b'_1)$$

之に $\psi_1(x) = B_1 e^{\lambda_1 x}$ として代入すれば

$$\lambda_1^2 + \frac{v_0(f+i2\sigma)}{gh-v_0^2} \lambda_1 + \frac{\sigma^2-if\sigma}{gh-v_0^2} = 0$$

が得られるから

$$\lambda_1 = -\frac{v_0}{2(c^2-v_0^2)} \left[(f+i2\sigma) \pm \sqrt{f^2 - \frac{4c^2}{v_0^2} \sigma^2 + i \frac{4c^2}{v_0^2} f \sigma} \right]$$

となる。茲に $c^2 = gh$ である。

更に p_1, q_1 を共に正数として

$$f^2 - \frac{4c^2}{v_0^2} \sigma^2 + i \frac{4c^2}{v_0^2} f \sigma \equiv (p_1 + iq_1)^2$$

と置けば

$$p_1^2 - q_1^2 = f^2 - \frac{4c^2}{v_0^2} \sigma^2, \quad 2p_1 q_1 = \frac{4c^2}{v_0^2} f \sigma$$

である。依つて

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(f^2 - \frac{4c^2}{v_0^2} \sigma^2 \right)^2 + \left(\frac{4c^2}{v_0^2} f \sigma \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(f^2 - \frac{4c^2}{v_0^2} \sigma^2 \right) \\ q_1^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(f^2 - \frac{4c^2}{v_0^2} \sigma^2 \right)^2 + \left(\frac{4c^2}{v_0^2} f \sigma \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(f^2 - \frac{4c^2}{v_0^2} \sigma^2 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

實際の河川に就いては一般に $v_0 < \sqrt{gh}$ なる關係が満足されて居ると考へることが出来る。故に式(2.1)より $p_1 > f$ なる關係が成立することが知られる。依つて

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1' &= -\left[\frac{v_0}{2(c^2-v_0^2)} (p_1+f) + i \frac{v_0}{2(c^2-v_0^2)} (q_1+2\sigma) \right] \equiv -(\alpha_1 + i\beta_1), \\ \lambda_1'' &= \frac{v_0}{2(c^2-v_0^2)} (p_1-f) + i \frac{v_0}{2(c^2-v_0^2)} (q_1-2\sigma) \equiv \alpha_1' + i\beta_1' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

と置けば $\alpha_1 > 0, \alpha_1' > 0$ である。

微分方程式 (b'₁) の一般解は次の如く與へられる。即ち

$$\psi_1(x) = B_1' e^{\lambda_1' x} + B_1'' e^{\lambda_1'' x}.$$

然るに境界條件 $|\psi_1(x)|_{x=-\infty} = 0$ にして $\alpha_1' > 0$ であるから $B_1'' = 0$ 、而して境界條件

$|\psi_1(v)|_{x=0}=a$ より $B'_1=a$ である。故に所要の解

$$\psi_1(v)=ae^{-(\alpha_1+i\beta_1)x}\dots\dots\dots(b.1)$$

が得られる。従つて潮汐振動の第一次近似解は

$$\zeta_1(v, t)=\Re [ae^{-(\alpha_1+i\beta_1)x}e^{i\sigma t}]=ae^{-\alpha_1x}\cos(\sigma t-\beta_1v)\dots\dots\dots(B.1)$$

となる。茲に α_1 及び β_1 は式(2.2)にて與へられる。

式(b.1)を式(b₁)に代入して

$$\frac{d\varphi_1}{dv}=-[\dot{\sigma}+v_0(\alpha_1+i\beta_1)]\frac{a}{h}e^{-(\alpha_1+i\beta_1)x}$$

が得られる。依つて之を積分して

$$\varphi_1(x)=\frac{\dot{\sigma}+v_0(\alpha_1+i\beta_1)}{\alpha_1+i\beta_1}\frac{a}{h}e^{-(\alpha_1+i\beta_1)x}+C_1$$

が得られる。 $\psi_1(v)$ 及び $\varphi_1(v)$ は式 (a₁) を満足すべきであるから $C_1=0$ である。それ故に

$$\varphi_1(x)=\frac{\dot{\sigma}+v_0(\alpha_1+i\beta_1)}{\alpha_1+i\beta_1}\frac{a}{h}e^{-(\alpha_1+i\beta_1)x}\dots\dots\dots(a.1)$$

である。従つて潮流の第一次近似解は

$$\begin{aligned} \eta_1(v, t) &= \Re \left[\frac{\dot{\sigma}+v_0(\alpha_1+i\beta_1)}{\alpha_1+i\beta_1} \frac{a}{h} e^{-(\alpha_1+i\beta_1)x+i\sigma t} \right] \\ &= \frac{r_1}{h} ae^{-\alpha_1x} \cos(\sigma t - \beta_1v + \theta_1) \dots\dots\dots(A.1) \end{aligned}$$

となる。茲に $\frac{\dot{\sigma}+v_0(\alpha_1+i\beta_1)}{\alpha_1+i\beta_1} \equiv r_1 e^{i\theta_1} \dots\dots\dots(2.3)$

〔II〕 第二次近似解 $\zeta_2(v, t)$, $\eta_2(v, t)$

$$\left. \begin{aligned} (f+i2\sigma)\varphi_2(v)-v_0\frac{d\varphi_2}{dv}+g\frac{d\psi_2}{dv} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dv}[\varphi_1(v)]^2 \dots\dots\dots(a_2) \\ i2\sigma\psi_2(v)-v_0\frac{d\psi_2}{dv}+h\frac{d\varphi_2}{dv} &= -\frac{d}{dv}[\varphi_1(x)\psi_1(v)] \dots\dots\dots(b_2) \end{aligned} \right\}$$

なる聯立微分方程式を解く。式(b₂)より

$$\frac{d\varphi_2}{dv} = -\frac{i2\sigma}{h}\psi_2(v) + \frac{v_0}{h}\frac{d\psi_2}{dv} - \frac{1}{h}\frac{d}{dv}[\varphi_1(v)\psi_1(v)] \dots\dots\dots(b'_2)$$

之を式(a₂)に代入して

$$(f+i2\sigma)\psi_2(x)+\frac{i2\sigma}{h}\tau_0\psi_2(x)+\frac{gh-\tau_0^2}{h}\frac{d\psi_2}{dx}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\tau_1(x)]^2-\frac{\tau_0}{h}\frac{d}{dx}[\tau_1(x)\psi_1(x)]$$

が得られる。之を x に就いて微分して式 (b₂) を代入すれば $\psi_2(x)$ が満足する微分方程式が得られる。即ち

$$(gh-\tau_0^2)\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+\tau_0(f+i4\sigma)\frac{d\psi_2}{dx}+(4\sigma^2-i2f\sigma)\psi_2(x)$$

$$=(f+i2\sigma)\frac{d}{dx}[\tau_1(x)\psi_1(x)]-\tau_0\frac{d^2}{dx^2}[\tau_1(x)\psi_1(x)]-\frac{h}{2}\frac{d^2}{dx^2}[\tau_1(x)]^2\cdots(b_2'')$$

先づ此の微分方程式の餘函數を求める。微分方程式

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+\frac{\tau_0(f+i4\sigma)}{gh-\tau_0^2}\frac{d\psi_2}{dx}+\frac{4\sigma^2-i2f\sigma}{gh-\tau_0^2}\psi_2(x)=0$$

に $\psi_2(x)=B_2e^{\lambda_2x}$ として代入すれば λ_2 を決定する二次方程式が得られる。夫を解いて

$$\lambda_2=-\frac{\tau_0}{2(\epsilon^2-\tau_0^2)}\left[(f+i4\sigma)\pm\sqrt{f^2-16\frac{\epsilon^2}{\tau_0^2}\sigma^2+i8\frac{\epsilon^2}{\tau_0^2}f\sigma}\right]$$

が得られる。更に

$$f^2-16\frac{\epsilon^2}{\tau_0^2}\sigma^2+i8\frac{\epsilon^2}{\tau_0^2}f\sigma\equiv(p_2+iq_2)^2$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(f^2 - 16 \frac{\epsilon^2}{\tau_0^2} \sigma^2 \right) + \left(\frac{8\epsilon^2}{\tau_0^2} f \sigma \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(f^2 - 16 \frac{\epsilon^2}{\tau_0^2} \sigma^2 \right), \\ \lambda_2' &= \frac{1}{2} \left[\left(f^2 - 16 \frac{\epsilon^2}{\tau_0^2} \sigma^2 \right) + \left(\frac{8\epsilon^2}{\tau_0^2} f \sigma \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(f^2 - 16 \frac{\epsilon^2}{\tau_0^2} \sigma^2 \right) \end{aligned} \right\} \cdots (2.4)$$

となる。上述の通り $\tau_0 < \sqrt{gh}$ なる關係が成立すると考へられるから $p_2 > f$ であることが知られる。従つて

$$\lambda_2 = - \left[\frac{\tau_0}{2(\epsilon^2 - \tau_0^2)} (p_2 + f) + i \frac{\tau_0}{2(\epsilon^2 - \tau_0^2)} (q_2 + 4\sigma) \right] \equiv -(\alpha_2 + i\beta_2),$$

$$\lambda_2' = \frac{\tau_0}{2(\epsilon^2 - \tau_0^2)} (p_2 - f) + i \frac{\tau_0}{2(\epsilon^2 - \tau_0^2)} (q_2 - 4\sigma) \equiv \alpha_2' + i\beta_2'$$

に於て $\alpha_2 > 0$, $\alpha_2' > 0$ である。

故に境界條件 $|\psi_2(x)|_{x=\infty} = 0$ を満足する餘函數は次の如くである。即ち

$$\psi_2(x) = B_2' e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x}$$

式(b.1)及び(a.1)より

$$\begin{aligned} \varphi_1(x)\psi_1(x) &= \frac{i\sigma + v_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{\alpha_1 + i\beta_1} \left(\frac{a}{h} \right) a e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}, \\ \frac{h}{2} [\varphi_1(x)]^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{i\sigma + v_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{\alpha_1 + i\beta_1} \right)^2 \left(\frac{a}{h} \right) a e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} (f + i2\sigma) \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\psi_1(x)] - v_0 \frac{d^2}{dx^2} [\varphi_1(x)\psi_1(x)] - \frac{h}{2} \frac{d^2}{dx^2} [\psi_1(x)]^2 \\ = -[i\sigma + v_0(\alpha_1 + i\beta_1)] [(f + i3\sigma) + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)] 2 \frac{a}{h} a e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x} \end{aligned}$$

となる。故に微分方程式 (b'') の特解は $B_2'' e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}$ であることが知られる。之を式 (b'') に代入して

$$B_2'' = - \frac{f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{f} \left(\frac{a}{h} \right) a$$

が得られる。而して微分方程式の一般解は

$$\psi_2(x) = B_2' e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x} + B_2'' e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}$$

である。然るに境界条件 $\psi_2(x)|_{x=0} = 0$ を満足するから

$$B_2 = -B_2'' = \frac{f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{f}$$

である。従つて微分方程式 (b'') の一般解は

$$\psi_2(x) = \frac{f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{f} \frac{a}{h} \left[a e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x} - a e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x} \right] \dots \dots (b.2)$$

となる。依つて潮汐振動の第二次近似解は

$$\begin{aligned} \zeta_2(x, t) &= \Re \left[\frac{f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{f} \left(\frac{a}{h} \right) \left\{ a e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x + i2\sigma t} - a e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x + i2\sigma t} \right\} \right] \\ &= r_2 \left(\frac{a}{h} \right) \left[a e^{-\alpha_2 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_2) - a e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_2) \right] \dots \dots (B.2) \end{aligned}$$

である。茲に

$$\frac{f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{f} \equiv r_2 e^{i\theta_2} \dots \dots \dots (2.7)$$

次に式(b.2)を式(b₂)に代入すれば

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = - \frac{[i2\sigma + v_0(\alpha_2 + i\beta_2)][f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{f} \left(\frac{a}{h}\right)^2 e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x} \\ + \frac{2[i\sigma + v_0(\alpha_1 + i\beta_1)][2f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{f} \left(\frac{a}{h}\right)^2 e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}$$

が得られる。之を x に就いて積分して次の結果が得られる。即ち

$$\varphi_2(x) = \frac{[i2\sigma + v_0(\alpha_2 + i\beta_2)][f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{f(\alpha_2 + i\beta_2)} \left(\frac{a}{h}\right)^2 e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x} \\ - \frac{[i\sigma + v_0(\alpha_1 + i\beta_1)][2f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{f(\alpha_1 + i\beta_1)} \left(\frac{a}{h}\right)^2 e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x} + C_2 \dots (a.2)$$

$\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ は式(a₂)を満足すべきであるから積分常数 C_2 は零である。従つて潮流の
第二次近似解は次の如く與へられる。即ち

$$\eta_2(x, t) = \Re \left\{ \frac{[i2\sigma + v_0(\alpha_2 + i\beta_2)][f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{(\alpha_2 + i\beta_2) f} \left(\frac{a}{h}\right)^2 e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x + i2\sigma t} \right\} \\ - \Re \left\{ \frac{[i\sigma + v_0(\alpha_1 + i\beta_1)][2f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{(\alpha_1 + i\beta_1) f} \left(\frac{a}{h}\right)^2 e^{-(\alpha_1 + i\beta_1)x + i2\sigma t} \right\} \\ = r_3 \left(\frac{a}{h}\right)^2 e^{-\alpha_2 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_3) \\ - r_4 \left(\frac{a}{h}\right)^2 e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_4) \dots \dots \dots (A.2)$$

茲に

$$\frac{[i2\sigma + v_0(\alpha_2 + i\beta_2)][f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{(\alpha_2 + i\beta_2) f} \equiv r_3 e^{i\theta_3} \dots \dots \dots (2.8) \\ \left. \begin{aligned} \frac{[i\sigma + v_0(\alpha_1 + i\beta_1)][2f + i3\sigma + 3v_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{(\alpha_1 + i\beta_1) f} &\equiv r_4 e^{i\theta_4} \dots \dots \dots (2.9) \end{aligned} \right\}$$

第三次以上の近似解も上と同様の手續にて求めることが出来る。しかし第三次以上の近似解は非常に小であるから 實用上は 夫等を要しない。茲には夫等を求めることを省略する。

本節に於て求めたる解を纏めて書けば次の如くである。即ち

$$\bar{\eta}(x, t) = -\eta_0 + \eta_1(x, t) + \eta_2(x, t) + \dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\gamma_0}{f}g + \frac{r_1}{h}ae^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \beta_1 x + \theta_1) \\
 &+ \left(\frac{r_3}{h}\right)\left(\frac{a}{h}\right)ae^{-\alpha_2 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_3) \\
 &- \left(\frac{r_1}{h}\right)\left(\frac{a}{h}\right)ae^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_4) \\
 &+ \dots\dots\dots (A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\zeta}(x, t) &= \gamma_0 x + \zeta(x, t) = \gamma_0 x + \zeta_1(x, t) + \zeta_2(x, t) + \dots\dots\dots \\
 &= \gamma_0 x + ae^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \beta_1 x) \\
 &+ r_2 \frac{a}{h} [ae^{-\alpha_2 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_2) \\
 &- ae^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_2)] \\
 &+ \dots\dots\dots (B)
 \end{aligned}$$

3. 河川に於ける潮汐振動及び潮流

前節に於て得たる解を実際の河川に適用する 手續及び其の 解の物理學的 意義を説明する。

先づ河口より餘り遠からざる一地點までの區間をとる。其の區間では上に假定せる境界條件が大略満足されてゐるものとする。

(1) **基礎の實測値**：一考へて居る河川の區間での平均の水面の勾配 γ_0 、其の區間での平均水面からの深度の平均 h 、及び河口での潮差 $2a$ の三つの實測量を基礎として、其の區間の任意の一地點に於ける潮汐振動及び潮流を算出し得る式が前節に於て得られたのである。

(2) **摩擦の係數**：一潮汐の一週期間での河表面の勾配の絶對値の平均を γ_m とする。此の勾配の平均値は河口及び上流の基準地點に於ける水位の同時觀測より求めることが出来る。

一週期間の平均流速の絶對値の平均 v_m は略算的に Chezy の法則を適用して

$$v_m = C \sqrt{\gamma_m h}$$

とすることが出来る。茲に C は粗度係數である。又摩擦抵抗が平均流速に比例するときの勾配の平均値 γ_m に基く平均流速 v_m は

$$v_m = \frac{\gamma_m}{f} g$$

である。茲に f は摩擦係数である。

此等の平均流速が一致する如く f を定める。依つて

$$f = \frac{g}{C} \sqrt{\frac{\gamma_m}{h}} \dots \dots \dots (3.1)$$

とする。斯くすることに依つて摩擦抵抗が平均流速の一乗に比例すると假定することの缺點が補ひ得られる。而も粗度係数 C は種々の水路竝に河川に就いて實測値が得られて居るから實際の河川に適用するには便宜が多い。

(3) 潮汐振動：— 第一次近似解は式 (B.1) にて與へられる如く

$$\zeta_1(x, t) = ae^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \beta_1 x)$$

である。故に其の振幅は上流に到るに伴いて減少し其の減衰因子は $e^{-\alpha_1 x}$ である。又其の位相も上流ほどおくれる。即ち傳播速度が $\frac{\sigma}{\beta_1}$ にて進行する波動である。

α_1, β_1 は式 (2.1) 及び (2.2) にて與へられる如く γ_0, h, f に關係する。一定河流速 γ_0 即ち平均河表面の勾配 γ_0 が大なるほど、摩擦の係数 f が大なるほど、又 h が小なるほど α_1 及び β_1 は大となる。

然るに實際の河川に就いて見るに水面勾配 γ_0 が比較的小ならざる場合には粗度係数 C は小にして、平均水深 h が小なることが通例である。故に式 (3.3) にて明なる如く f も亦大となる。従つて水面勾配 γ_0 が比較的に小ならずして平均水深が小なる河川に於ては振幅が減衰する割合は大にして傳播速度は小である。

今 $\zeta_1(x, t) \equiv |\zeta_1| \cos(\sigma t - \epsilon_1)$ とすれば

$$|\zeta_1| = ae^{-\alpha_1 x}, \quad \epsilon_1 = \beta_1 x \dots \dots \dots (3.2)$$

次に第二次近似解は式 (B.2) にて與へられる如く

$$\zeta_2(x, t) = a \frac{a}{h} \gamma_2 [e^{-\alpha_2 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_2) - e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_2)]$$

である。今 $\zeta_2(x, t) \equiv \zeta_2'(x, t) + \zeta_2''(x, t)$ として

$$\zeta_2' = |\zeta_2'| \cos(2\sigma t + \epsilon_2'), \quad \zeta_2'' = -|\zeta_2''| \cos(2\sigma t + \epsilon_2'')$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} |\zeta_2'| &= \left(\frac{a}{h} r_2 \right) a e^{-\alpha_2 x}, \quad |\zeta_2''| = \left(\frac{a}{h} r_2 \right) a e^{-2\alpha_1 x} \\ \epsilon_2' &= 0_2 - \beta_2, \quad \epsilon_2'' = 0_2 - 2\beta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.3)$$

である。更に $\zeta_2'(x, t)$ 及び $\zeta_2''(x, t)$ を合成して

$$\zeta_2(x, t) = |\zeta_2| \cos(2\sigma t + \epsilon_2 - 2\epsilon_1)$$

とさせば

$$\begin{aligned} |\zeta_2| &= \{ |\zeta_2'|^2 + |\zeta_2''|^2 - 2 |\zeta_2'| |\zeta_2''| \cos(\epsilon_2' - \epsilon_2'') \}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{a}{h} r_2 \right) a \left[e^{-2\alpha_2 x} + e^{-4\alpha_1 x} - 2 e^{-(\alpha_2 + 2\alpha_1)x} \cos(2\beta_1 - \beta_2)x \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= 2\epsilon_1 + \epsilon_2' + \tan^{-1} \frac{|\zeta_2''| \sin(\epsilon_2' - \epsilon_2'')}{|\zeta_2'| - |\zeta_2''| \cos(\epsilon_2' - \epsilon_2'')} \\ &= 0_2 + (2\beta_1 - \beta_2)x + \tan^{-1} \frac{|\zeta_2''| \sin(\epsilon_2' - \epsilon_2'')}{|\zeta_2'| - |\zeta_2''| \cos(\epsilon_2' - \epsilon_2'')} \dots\dots\dots (3.5) \end{aligned}$$

α_2, β_2 は式 (2.4) 及び (2.5) にて示される通りにして $\alpha_2 < 2\alpha_1, \beta_2 < 2\beta_1$ なる関係がある。

而して $2\alpha_1 - \alpha_2, 2\beta_1 - \beta_2$ は一般に非常に小である。故に式 (3.4) にて與へられる第二次近似解の振幅 $|\zeta_2|$ は第一次近似解の振幅 $|\zeta_1|$ に比較して小である。

第一次近似解は第二次近似解との位相の差は式 (3.5) に示す通りであるが第二項及び第三項は左程大でないが 0_2 が大きいから此の位相差 ϵ_2 は相當大きい。それ故に第二次近似解が潮汐振動の振幅に及ぼす影響は非常に少い。

一地點での潮汐振動に就いては次の如く説明することが出来る。即ち第一次近似解 $\zeta_1(x, t)$ は本來の潮浪で平均水面の勾配 γ_0 、平均水深 h 、及び河底竝に兩岸等での摩擦等の影響を受けて其の振幅が $e^{-\alpha_1 x}$ にて減衰しつつ $\frac{\sigma}{\beta_1}$ なる傳播速度にて進行する波動である。而して是が各地點に於ての潮汐振動の主要部分をなすのである。

第二次以上の近似解は河口に於てはなきものにして潮浪が上流に傳播し行くに伴いて二次的に生ずる Overtide で本來の潮浪の週期の $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\dots\dots$ を週期とする波動である。

第二次以上の近似解の振幅は第一次近似解の振幅に比して小である。而も第一次近似解との位相の差が大きから一地點の潮汐振動の振幅に及ぼす影響は非常に少い。しかし其の振動を多少複雑にする結果となる。

(4) 潮流：— 第一次近似解は式 (A.1) にて與へられる如く

$$v_1(x, t) = \frac{r_1}{h} a e^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \beta_1 x + \theta_1)$$

である。故に其の振幅は潮汐振動と同様に上流に到るに伴いて減少し其の減衰因子は $e^{-\alpha_1 x}$ である。而して其の傳播速度が $\frac{\sigma}{\beta_1}$ なる進行する波動であることも亦潮汐振動と同様である。

只潮汐振動と異なる點は其の振幅が潮汐振動の第一次近似解の $\frac{r_1}{h}$ 倍であることと位相の差が θ_1 であることである。

今 $v_1(x, t) = |v_1| \cos(\sigma t - \epsilon_1 + \Phi_1)$ とすれば

$$|v_1| = \frac{r_1}{h} a e^{-\alpha_1 x}, \quad \Phi_1 = \theta_1, \quad \epsilon_1 = \beta_1 x, \quad \dots \dots \dots (3.5)$$

又第二次近似解は式(A.2)にて與へられる如く次の通りである。即ち

$$v_2(x, t) = r_3 \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-\alpha_2 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_3) \\ - r_4 \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_4).$$

$$v_2(x, t) = v_2'(x, t) + v_2''(x, t) \quad \text{として}$$

$$v_2'(x, t) \equiv |v_2'| \cos(2\sigma t + \Phi_2'), \quad v_2''(x, t) \equiv -|v_2''| \cos(2\sigma t + \Phi_2'')$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} |v_2'| &= r_3 \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-\alpha_2 x}, \quad |v_2''| = r_4 \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-2\alpha_1 x} \\ \Phi_2' &= \theta_3 - \beta_2 x, \quad \Phi_2'' = \theta_4 - 2\beta_1 x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.7)$$

である。更に $v_2'(x, t)$ 及び $v_2''(x, t)$ を合成して

$$v_2(x, t) = |v_2| \cos(2\sigma t - 2\epsilon_1 + \Phi_2)$$

となせば

$$|v_2| = [|v_2'|^2 + |v_2''|^2 - 2|v_2'| |v_2''| \cos(\Phi_2' - \Phi_2'')]^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (3.8)$$

にして

$$\Phi_2 = \theta_3 + (2\beta_1 - \beta_2)x + \tan^{-1} \frac{|v_2''| \sin(\Phi_2' - \Phi_2'')}{|v_2'| - |v_2''| \cos(\Phi_2' - \Phi_2'')} \dots \dots \dots (3.9)$$

式(3.8)にて與へられる第二次近似解の振幅 $|v_2|$ は第一次近似解の振幅 $|v_1|$ に比較して小である。潮汐振動の第一次近似解と潮流の第二次近似解との位相の差は Φ_2 で式(3.9)にて與へられる通りである。しかし潮流の第一次近似解との位相の差は $\Phi_2 - \theta_1$ であるか

ら左程大きくない。それ故に第二次近似解が潮流の振幅に及ぼす影響は小なれども潮汐振動の場合より多少大である。

潮流に就いては一般的に次の如く説明される。即ち一定なる河流の外に $\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta_3}{\partial t}$, ……………等に基き潮流 v_1 , v_2 , v_3 , ……………等を生ずる。第一次近似解は本来の潮浪と同一の週期を有する一つの波動である。 v_2 , v_3 , ……………等の第二次以上の近似解は河口にてはなきものである。而して其の週期は Overtide ζ_2 , ζ_3 , ……………等と同様の週期を有する。此等の振動流が異なる位相で同一地點に到達したる結果其等の合成されたるものが其の地點での潮流となる。更に河流 $-v_0$ を加へて其の地點での流動の平均流速となる。

4. 實例—隅田川に於ける潮汐

實際の河川に於ては、上に假定せる如き簡單にして規則正しきものに非ざることは勿論である。依つて實際の河川に於ける潮汐に對して上の理論を適用して如何なる程度まで説明し得るかを検討することが必要である。

今一例として隅田川の河口附近での潮汐に就いて考へる。物部長徳氏著水理學 325 頁にある大正二年四月七日午前十時より翌八日午前一時までの觀測を拜借する。

河口の鹽岸島と其處より 15260m. 上流にある尾久との區間を考へる。

(1) 基礎の實測値

(i) 河口鹽岸島に於ける潮差は 1.65m であるから潮汐振動の振幅は

$$a=0.825\text{m}$$

である。

(ii) 鹽岸島・尾久間での最低水位の落差は 0.167m である。然るに鹽岸島及び尾久での潮差は夫々 1.65m 及び 1.56m である。故に鹽岸島・尾久間での平均水位の落差は 0.122m である。故に平均水位の勾配は

$$\gamma_0 = \frac{0.122}{15260} = 0.7995 \times 10^{-4}$$

となる。

(iii) 平均水深の鹽岸島・尾久間での平均値 h に對する觀測としては鹽岸島より 8940 の距離にある千住に於ての横斷面が與へられるのみである。即ち

$$h = 2.34 + 0.69 \times \frac{1.55}{2} = 2.875\text{m}$$

河 川 に 於 ける 潮 汐

であるから止むを得ず $h=3m$ ととる。

- (2) 摩擦係数 f :— 尾久・靈岸島間での勾配の絶対値に就いての一週期間の平均値を γ_m とする。この勾配の平均値は尾久・靈岸島の兩地點に於ての水位の同時観測より求めることが出来る。而して其の値は

$$\gamma_m=1.93\times10^{-9}$$

である。前節に於て述べたる方法にて摩擦係数 f を定める。即ち

$$f=\frac{g}{C}\sqrt{\frac{\gamma_m}{h}}\dots\dots\dots(3.1)$$

より f を求める。粗度係数 C としては 50, 60, 70 の三つの場合をとる。 f の値は次の通りである。

C	50	60	70
$f\times10^4$	4.971	4.143	3.551

- (3) 一定河流の流速 v_0 :— 平均水位の勾配 γ_0 に基く一定河流の流速は式 (1.6) に與へられた如く $v_0=\frac{\gamma_0 g}{f}$ である。

C	50	60	70
$v_0(m/sec)$	0.1576	0.1891	0.2206

- (4) 振幅の減衰指數 α_1, α_2 :— 長さの單位を總てにとれば α_1 及び α_2 は次の通りである。

C	50	60	70
$\alpha_1\times10^4$	0.3136	0.2802	0.2541
$\alpha_2\times10^4$	0.3861	0.3377	0.3005

- (5) 傳播速度:— 潮汐振動 竝に潮流の 第一次近似解即ち 其等の主要部の 傳播速度 V は $V=\frac{\sigma}{\beta_1}$ で與へられる。半日潮を考へるのであるから

$$\sigma=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{44700}=1.4056\times10^{-4}$$

であるから V は次の通りになる。

河 川 に 於 ける 潮 汐

C	50	60	70
$\beta_1 \times 10^4$	0.4041	0.3810	0.3644
$V(m/sec.)$	3.478	3.630	3.857

靈岸島・尾久間での潮汐の傳播速度は $3.7m/sec$ である。

$C=60$ とすれば傳播速度は理論値と實測値とは殆ど一致する。

以上の計算の結果より靈岸島・尾久間の任意の一地點に於ける潮汐振動と潮流とを計算出来る。今茲に千住に於ての潮汐振動と潮流とを算出することにする。

千住に於ける潮汐振動と潮流

[A] 潮汐振動：— $C=60$ にとる。然るときは第一次近似解の傳播速度は 3.69 米/秒にして、靈岸島から千住に達するに要する時間は 40 分 23 秒である。

千住に於ける潮汐振動の第一次近似解及び第二次近似解は次々次の如くなる。即ち前節に於ける諸式より

$$\zeta_1(t, l) = 0.6422 \cos(\sigma t - 19^\circ 31'),$$

$$\zeta_2(t, l) = 0.0523 \cos\{2(\sigma t - 19^\circ 31') + 80^\circ 1'\}$$

が得られる。 ζ_1 の最高潮が千住に到達したる瞬間を時刻を計る基準として、 $\zeta_1 + \zeta_2$ の値に就いて $\frac{T}{36}$ 毎の變化を計算すれば表(A)の通りになる。此の計算の結果から次の事柄が知られる。

(i) 最低潮の時刻から最高潮に達するまでの時間は潮汐の週期の約 $\frac{4}{9}$ にして半週期より短い。

(ii) 最低潮は平均水位の後 $0.3T$ にして来る。又低潮の時間は高潮の時間より多少長い。

(iii) 潮差は $1.30m$ である。實測値が $1.55m$ であるから、理論値は實測値の約 16.7% 程度小である。

潮差の理論値と實測値との差異に就いては次の様に解せられる。

(a) 靈岸島と千住との區間では平均水深が $3m$ より多少大であると考へられる。従つて傳播速度は多少大となる。又粗度係數 C は 60 より多少大なるべき筈である。

河 川 に 於 ける 潮 汐

C	$ \zeta_1 $	$ \zeta_2 $	$ \epsilon_2 $
50	0.6233	0.0502	$77^{\circ}25'$
60	0.6422	0.0523	$80^{\circ}1'$
70	0.6574	0.0548	$82^{\circ}4'$

上に示す様に C が大なれば振幅が大となる。故に潮差の理論値も多少實測値に近迫する筈である。

(b) 河幅及び平均水深が一樣と假定せるも實際の河川に於ては上流に到るに伴ひて僅かながら減少する傾向がある。それがため波動の「エネルギー」が濃縮されるから理論値より實測の潮差の方が多少大となるべきものと解せられる。

表(A) 潮 汐 振 動

t/T	$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 (m)$	t/T	$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 (m)$
0	+0.6513	$18/36$	-0.6331
$1/36$	+0.6233	$19/36$	-0.6415
$2/36$	+0.5773	$20/36$	-0.6297
$3/36$	+0.5160	$21/36$	-0.5962
$4/36$	+0.4427	$22/36$	-0.5411
$5/36$	+0.3605	$23/36$	-0.4651
$6/36$	+0.2719	$24/36$	-0.3703
$7/36$	+0.1795	$25/36$	-0.2597
$8/36$	+0.0853	$26/36$	-0.1377
$9/36$	-0.0091	$27/36$	-0.0091
$10/36$	-0.1024	$28/36$	+0.1206
$11/36$	-0.1934	$29/36$	+0.2458
$12/36$	-0.2810	$30/36$	+0.3612
$13/36$	-0.3636	$31/36$	+0.4670
$14/36$	-0.4396	$32/36$	+0.5442
$15/36$	-0.5069	$33/36$	+0.6053
$16/36$	-0.5634	$34/36$	+0.6436
$17/36$	-0.6062	$35/36$	+0.6586

[B] 潮流:— $C=60$ にとることは潮汐振動の場合と同様である。従つて潮流の主要部である第一次近似解の傳播速度は潮汐振動と同様に3.67米/秒である。

平均水位の勾配に基く一定河流 v_0 及び潮流の第一次近似解竝に第二次近似解は次の如くなる。即ち前節の諸式より

河 川 に 於 ける 潮 汐

$$-v_0 = -0.1891,$$

$$v_1(x, t) = 0.6693 \cos(\sigma t - 19^\circ 18' + 34^\circ 17'),$$

$$v_2(x, t) = 0.1032 \cos\{2(\sigma t - 19^\circ 18') + 154^\circ 11'\}$$

が得られる。潮汐振動と位相の関係を明瞭にする便宜上潮汐振動の第一次近似解 v_1 の最高潮が到達する瞬間を時刻を計る基準とする。

$\bar{v} = -v_0 + v_1 + v_2$ の $\frac{T}{36}$ 毎の変化を計算すれば表 (B) に示す通りである。上の計算の結果に依つて次の事柄が知られる。

(i) 順流の最大値をとる時刻より溯流の最大値をとる時刻までの時間は $0.42T$ にして半週期より短い。

(ii) 順流の最大流速は溯流の最大流速の1.71倍にして遙に大である。

(iii) 順流の最大値に達してより約 $0.08T$ 後に最低潮に達し、又溯流の最大値に達してより約 $0.11T$ 後に最高潮に達する。

潮流に就いては實測値がないので比較することが出来ないが、低潮の際には流速が比較的大なることは河川に於ける特殊現象として既に知られてゐる事實である。上の理論的計算の結果はこの事實と符合する。

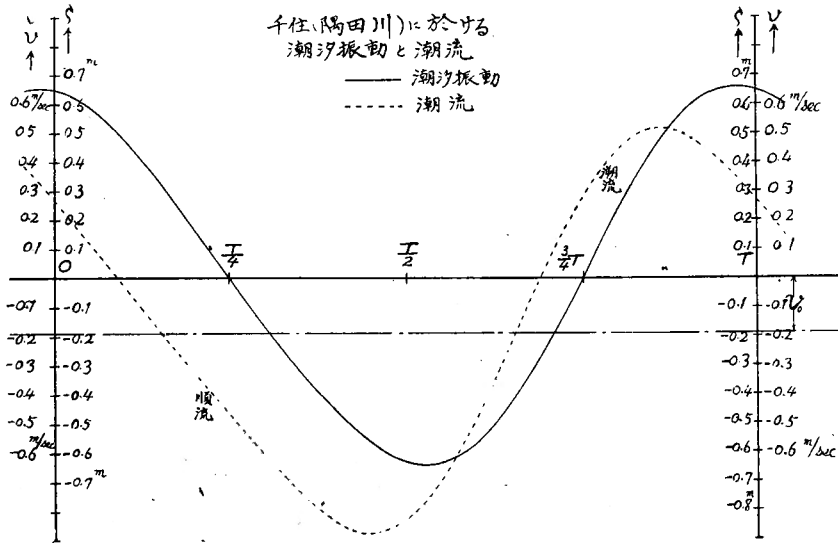
表(B) 平均河流速

t/T	$\bar{v} = -v_0 + v_1 + v_2$	t/T	$\bar{v} = -v_0 + v_1 + v_2$
0	+0.2710	$18/36$	-0.8350
$1/36$	+0.1873	$19/36$	-0.7709
$2/36$	+0.1015	$20/36$	-0.6799
$3/36$	+0.0159	$21/36$	-0.5649
$4/36$	-0.0673	$22/36$	-0.4299
$5/36$	-0.1505	$23/36$	-0.2839
$6/36$	-0.2316	$24/36$	-0.1316
$7/36$	-0.3119	$25/36$	+0.0183
$8/36$	-0.3924	$26/36$	+0.1584
$9/36$	-0.4732	$27/36$	+0.2808
$10/36$	-0.5537	$28/36$	+0.3809
$11/36$	-0.6324	$29/36$	+0.4544
$12/36$	-0.7067	$30/36$	+0.4993
$13/36$	-0.7738	$31/36$	+0.5146
$14/36$	-0.8269	$32/36$	+0.5049

河 川 に 於 ける 潮 汐

15/36	-0.8640	33/36	+0.4703
16/36	-0.8800	34/36	+0.4172
17/36	-0.8711	35/36	+0.3491

表(A), 表(B) に示せる計算の結果を一緒に圖示すれば次の如くなる。



結 言

河川の河底竝に兩岸に於ての摩擦抵抗, 平均水位の勾配を考慮し, 潮差が水深に比して小ならざる一般の場合の潮汐を論究したのである。依つて從來の理論に一步を進めた。

河口での潮差, 平均水位の勾配, 及び平均水深の三つの實測値を基礎にして, 任意の地點に於ての潮汐振動及び潮流を算出する式を得た。而して河川の潮汐に關する特殊性に就いて理論的に説明し得たのである。

一例として隅田川の潮汐に就いて其の實測値と理論値とを比較した。其の結果は上の理論を大様確かめ得たが, 潮差に就いては理論値が實測値より多少小いのである。此の差異は河幅及び水深が一樣ならざるためと解せられる。即ち實際の河川では上流に到るに伴ひて, 僅か乍ら河幅及び水深が減少するのが通例であるから波の「エネルギー」が濃縮するためと考へられる。之に對する補正に就いては近き將來に於て検討したいと思ふ。

終りに本研究で野滿教授より解答の方針其他種々懇切なる御忠言を賜はりしことを記して茲に深謝する次第である。